- **光栅衍射的强度公式：**

$$I_p = I_{m单}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

$$(\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi)$$

$$\beta = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}\cdot\sin\varphi$$

单缝衍射因子

缝间干涉因子

在同一单缝衍射因子调制下的 N 个缝的干涉条纹

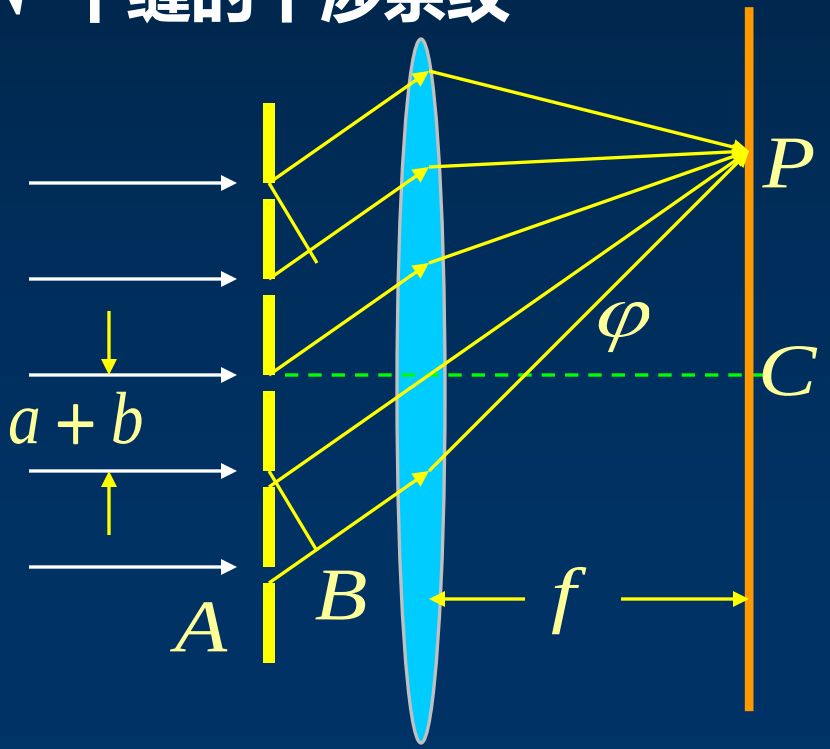
三、多缝干涉因子的性质

（1）主极大和光栅方程：

若 $\beta = k\pi$

$\sin\beta = 0 \quad \sin N\beta = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 = N^2$$



$$\Rightarrow I_p = I_{m单}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 N^2 = I_\varphi N^2$$

$$\Rightarrow \boxed{d\sin\varphi = (a+b)\sin\varphi = \pm k\lambda}$$ —— 光栅方程

凡衍射角满足上式条件，出现一个主极大，其强度为单缝在该方向强度的 N^2 倍。

分析1： $\sin\varphi = \dfrac{k\lambda}{a+b}$ $\quad d\downarrow \Rightarrow \varphi\uparrow$ **明纹间距增大**

分析2： d **一定时，** $\varphi \sim \lambda$

白光照射 → 彩色衍射图样 —— 色散作用

分析3： $|\sin\varphi| \le 1$ **当波长和光栅常数一定时，**

$$\boxed{k_{max} = (a+b)/\lambda}$$

(2) 暗纹公式：

若 $N\beta = \pm m\pi$　　$\sin N\beta = 0$　　$\sin\beta \neq 0$

$$N\delta = \pm 2m\pi \Rightarrow E_P = 0 \Rightarrow \frac{2N\pi(a+b)\sin\varphi}{\lambda} = \pm 2m\pi$$

$$(a+b)\sin\varphi = \pm m\frac{\lambda}{N} \qquad m \neq Nk$$ —— **暗纹条件**

(3) 次级明纹：

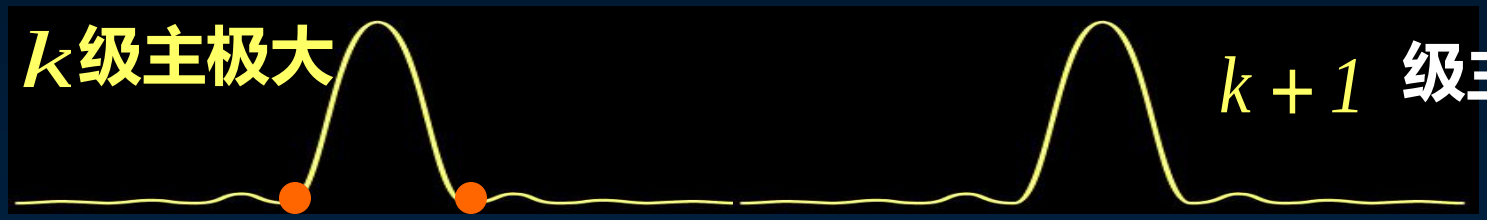
$$(a+b)\sin\varphi = \pm m\frac{\lambda}{N}$$ **有暗纹**

$$m = 1,2,3,\ldots N-1, N+1, N+2,\ldots\ldots 2N-1, 2N+1,\ldots$$

两个明纹间有N -1条暗纹，相邻暗纹之间有1条次级明纹，两个明纹之间有$N-2$条次级明纹。

结果：缝数N 增大 ⇒ 暗纹数增多 ⇒ 暗区扩大

注意： m 的取值：



$kN-1$　$kN+1$ **级极小**

- **主极大的半角宽度：**

$$d\sin\varphi_k = k\lambda \qquad d\sin(\varphi_k+\Delta\varphi)=\frac{kN+1}{N}\lambda$$

$$\sin(\varphi_k+\Delta\varphi)-\sin\varphi_k \approx \left(\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_k}\cdot\Delta\varphi$$

$$=\cos\varphi_k\Delta\varphi=\lambda/Nd$$

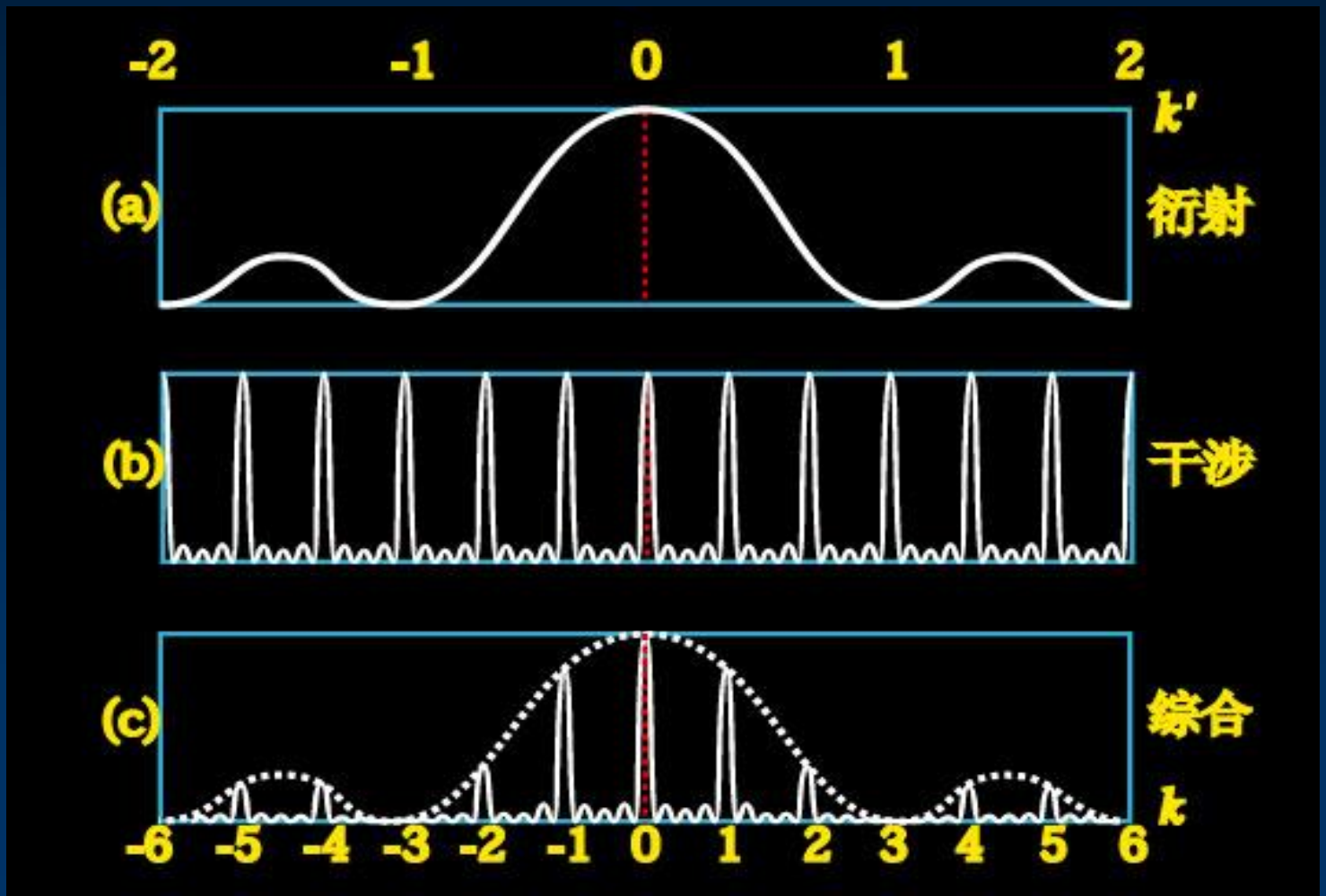
$$\Delta\varphi=\frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_k}$$

主极大的半角宽度与 Nd 成反比，Nd 越大，$\Delta\varphi_k$ 越小，主极大的锐度越大（条纹越细）

四、缺级现象 ☆ 单缝衍射因子的作用

$$I_p = I_{m单}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

各级主极大大小不同，若遇上单缝衍射相消时，主极大消失—— missing order



单缝强度分布

多缝强度分布

光栅强度分布

光栅明纹： $d\sin\varphi = \pm k\lambda$ $\quad k = 0,1,2,3,\ldots\ldots$

单缝暗纹： $a\sin\varphi = \pm k'\lambda$ $\quad k' = 1,2,3,\ldots\ldots$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{a+b}{a} = \frac{k}{k'}} \Longrightarrow \boxed{k = \frac{a+b}{a}k'}$$

出现缺级

例如： $a + b = 4a$

$$4a\sin\varphi = k\lambda \Longrightarrow k = \pm 4,\pm 8,\pm 12,\ldots\ldots$$

小结

- **在给定光栅常数之后，主极大的位置就被确定；**
- **单缝衍射因子不改变主极大的位置和半角宽度；**

  其作用仅影响强度在各级主极大间的分配。

例1： 每毫米刻有100条线的光栅，光栅宽度为 $D = 10mm$

当波长为500nm 的平行光垂直入射时，第四级主极大谱线恰好消失，第二级主极大的光强不为零，试求：

（1）光栅常数和缝的宽度；（2）第二级主极大的半角宽度。

解：

$$a+b=\frac{1}{N'}=\frac{1}{100}=1\times10^{-2}mm \qquad \frac{a+b}{a}=4$$

$$a=0.25\times10^{-2}mm$$

$$(a+b)\sin\theta_2=2\lambda \qquad \text{得} \quad \theta_2=5.739^\circ$$

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_2}$$

第二级主极大的半角宽度 $\Delta\theta=0.0028^o$

例2： 已知单色光垂直入射光栅上，$\lambda = 5461\,\text{Å}$　　$b = 2a$

$N = 3000/cm$，求观测到总条纹数?

解： $a + b = 1/N = 1/3000$

考虑最高级次

$$\sin\varphi_k = \frac{k\lambda}{a+b} = 0.1638k \Longrightarrow \sin(\pi/2) = 0.1638k$$

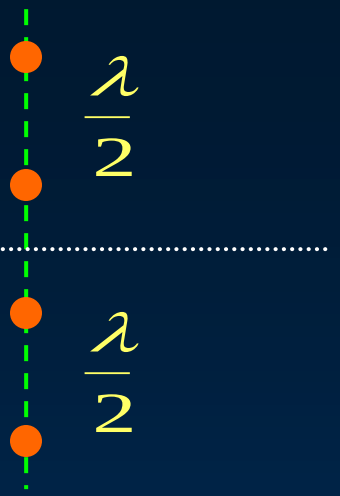
$$k = 1/0.1638 = 6.105 \approx 6$$

考虑缺级：　$b = 2a$

$$a + b = 3a \Rightarrow k = \frac{a+b}{a}k' = 3k'$$

可观测 9 条主极大明纹

例3： 现有四个无线电发射天线等距离排列在一直线上，组成一天线阵列，相邻天线间的距离恰等于无线电波的半波长，求4束电磁波的干涉强度在空间的分布。



解： 根据光栅衍射的明纹条件

$d\ \sin\varphi = \pm k\lambda$ 故 k 只能取零 $\frac{\lambda}{2}\sin\varphi = 0$

即主极大的方向角为 $\varphi = 0, \pi$

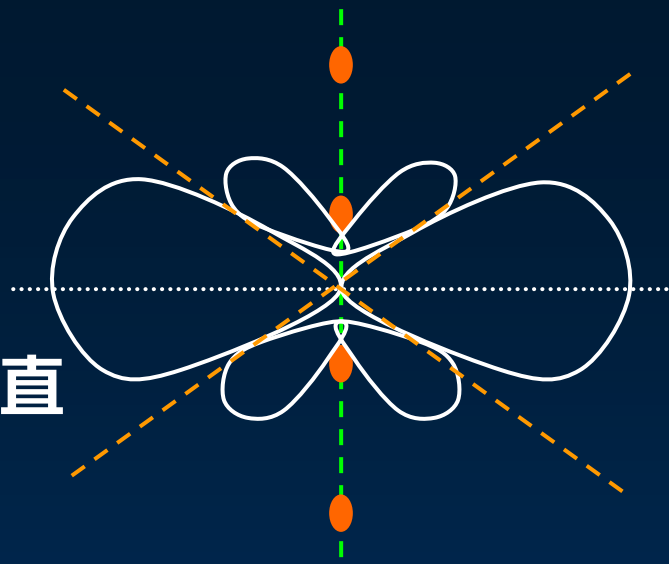
根据暗纹条件，可知干涉极小的光程差为

$$d\sin\varphi = \pm\frac{m}{N}\lambda \longrightarrow \frac{\lambda}{2}\sin\varphi = \pm\frac{m}{4}\lambda$$

$$\sin\varphi = \pm\frac{m}{2}$$

$$m=1\Rightarrow \begin{cases}\varphi=\pm\pi/6\\ \varphi=\pm5\pi/6\end{cases}$$

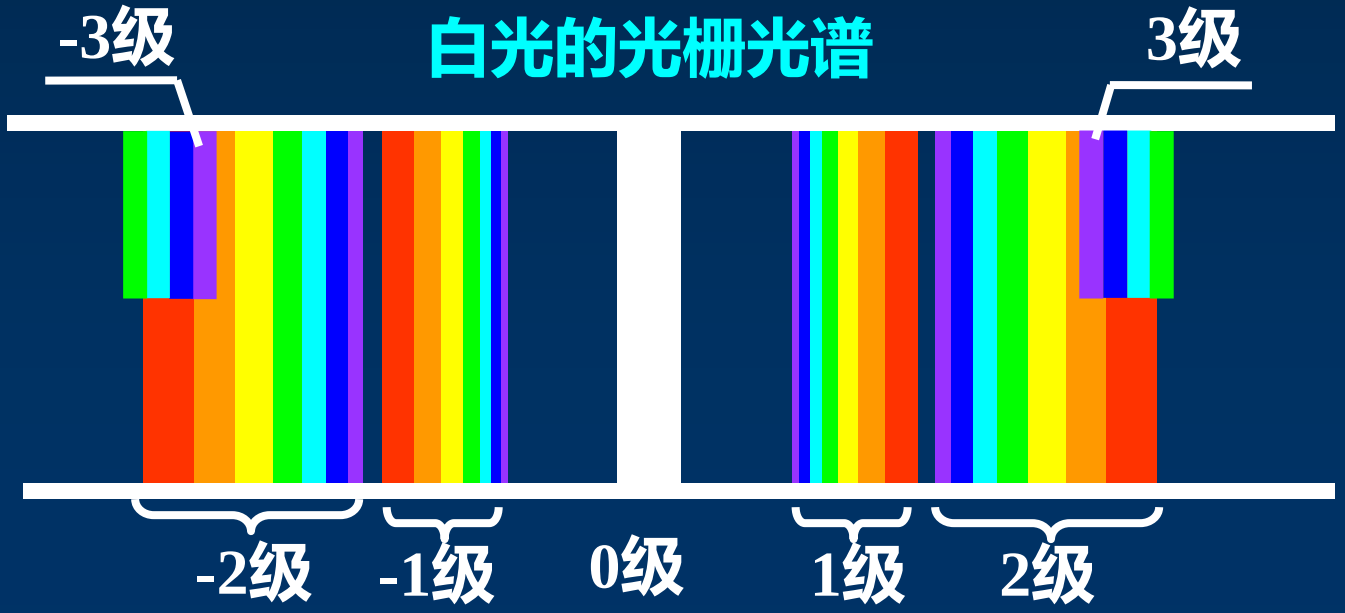
$$m=2\Rightarrow \varphi=\pm\pi/2$$



可见，此天线的发射具有强方向性，在垂直方向上强度最大，其他方向上相对很弱。

五、光栅光谱及色分辨本领

1. 光栅光谱　不同波长的明纹对应不同衍射角 —— 光栅色散



2. 色分辨本领 —— 将不同波长的光在谱线上分开的能力

设入射波长为 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ ，二谱线能否分开，由瑞利判据确定，当 $\lambda+\Delta\lambda$ 第 k 级主极大正好与 λ 的第 $k'=kN+1$ 级极小相重合时，根据光栅公式和暗纹条件，可知

$$\left.\begin{aligned} d\sin\varphi &= k(\lambda+\Delta\lambda) \\ d\sin\varphi &= \frac{k'}{N}\lambda = \frac{kN+1}{N}\lambda \end{aligned}\right\} \quad k(\lambda+\Delta\lambda)=(k+\frac{1}{N})\lambda$$

$$k\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N}$$

- **色分辨本领 (chromatic resolving power)：**

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=kN$$

色分辨本领与谱线级次和光栅缝数成正比。当固定观察某一级次时，增加光栅缝数能提高其分辨能力。

例： 已知双线的黄光垂直照射 $d = 3.5\times10^{-4}\,\mathrm{cm}$ $N = 800$ 的光栅上，$\lambda_1 = 589.0\,\mathbf{nm}$ $\lambda_2 = 589.6\,\mathbf{nm}$

（1）求两波长第三级谱线衍射角之差 $\Delta\theta_3 = \Delta\varphi_{2.3} - \Delta\varphi_{1.3}$

（2）哪级谱线后双线可分辨开?

解： (1)

$$\left.\begin{aligned} d\sin\varphi_{1.3} &= 3\lambda_1 \\ d\sin\varphi_{2.3} &= 3\lambda_2 \end{aligned}\right\}$$

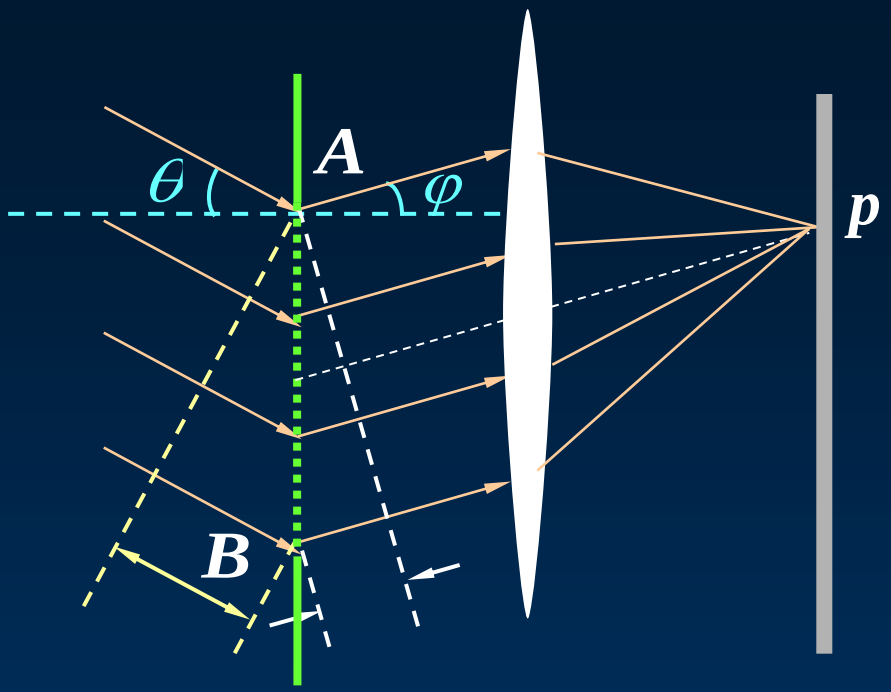
$$\Delta\theta_3 = \Delta\varphi_{2.3} - \Delta\varphi_{1.3} \quad = 6.0\times10^{-4}\,\mathrm{rad}$$

（2）由光栅的色分辨本领 —— 1级谱线后双线可分辨开

$$R = kN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{5890}{6} \approx 982$$

$$1\cdot800 < R = 982 < 2\cdot800$$

六、斜入射的光栅方程



主极大条件

$$d(\sin\varphi+\sin\theta)=\pm k\lambda$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$$

缺级条件

$$a(\sin\varphi+\sin\theta)=\pm k'\lambda$$

$$d(\sin\varphi+\sin\theta)=\pm k\lambda$$

最多明条纹数 $\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$

$$k_{+\max}=\left[\frac{d}{\lambda}(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\theta)\right] \qquad k_{-\max}=\left[\frac{d}{\lambda}(\sin\text{-}\frac{\pi}{2}+\sin\theta)\right]$$

$$\Delta N=k_{+\max}-k_{-\max}+1$$

例： 一束波长为 480 nm 的单色平行光，照射在每毫米内有600条刻痕的平面透射光栅上。

求： (1) 光线垂直入射时，最多能看到第几级光谱?

(2) 光线以 30^{o} 入射角入射时，最多能看到第几级光谱?

解： (1) $d\sin\varphi = \pm k\lambda$

$$d = \frac{1}{600\times10^{3}} = \frac{1}{6}\times10^{-5}\ \text{m}$$

$$k_{\max} = [d/\lambda] = \left[\frac{10^{-5}}{6\times4.8\times10^{-7}}\right] = 3$$

(2) $d(\sin\varphi + \sin30^{o}) = \pm k\lambda$

当 $\varphi = 90^{o}$ 时 $k_{+\max} = 5$

当 $\varphi = -90^{o}$ 时 $k_{-\max} = -1$

说明：

(1) 斜入射级次分布不对称

(2) 斜入射时，可得到更高级次的光谱，提高分辨率。

(3) 垂直入射和斜入射相比，完整级次数不变。

(4) 垂直入射和斜入射相比，缺级级次相同。

$$\left.\begin{aligned} d(\sin\varphi+\sin\theta)&=\pm k\lambda \\ a(\sin\varphi+\sin\theta)&=\pm k'\lambda \end{aligned}\right\} \longrightarrow k=k'\frac{d}{a} \quad k'=1,2,3,\cdots$$

七、X 射线的衍射

X-ray —— 波长很短的电磁波 $\lambda: 10^{-2} \sim 10\ \text{Å}$

普通光栅观测不到 X 射线衍射效应 $\Longleftrightarrow$ $(a+b)>>\lambda$

1912年，德国物理学家劳厄（M. Von Laue）提出：

天然晶体 $\Longleftrightarrow$ 三维的立体光栅 $\Longleftrightarrow$ X 射线衍射

The Nobel Prize in Physics 1914



M.von Laue

"for his discovery of the diffraction of X-rays by crystals"



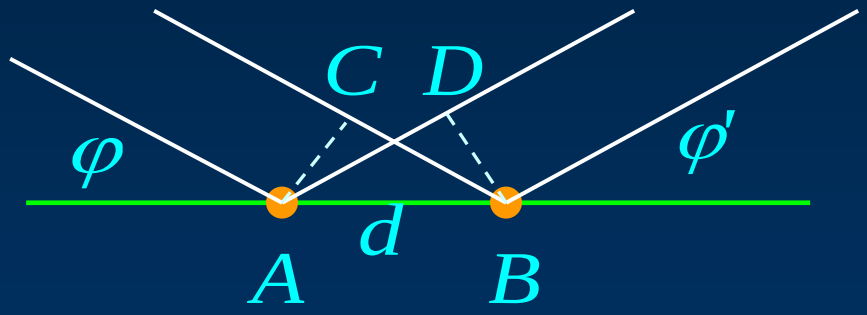
劳厄斑 —— X 射线通过晶体点阵发生衍射

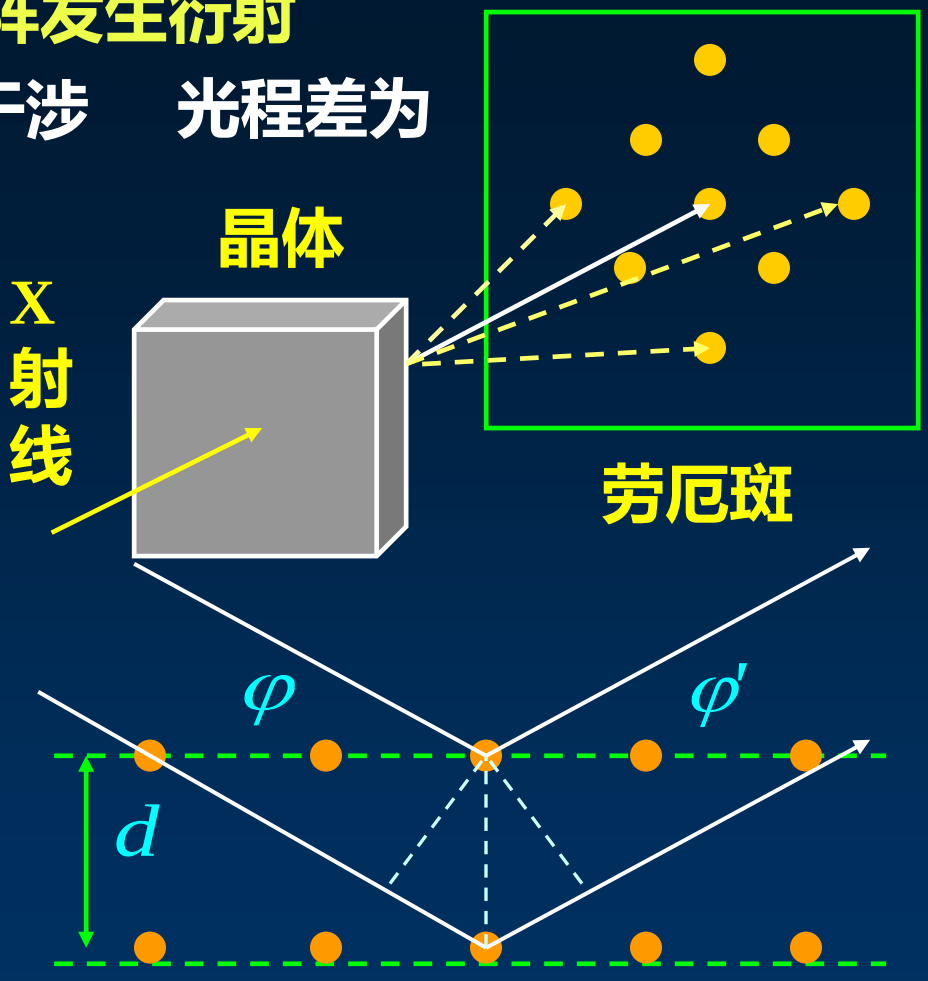
1. 同一晶面内各格点子波间的干涉　光程差为

$$\delta = CB - AD$$

$$= d(\cos\varphi - \cos\varphi')$$

$$= k\lambda$$ —— 干涉加强





2. 平行晶面间反射波的干涉

光程差　$\delta = 2d\sin\varphi = k\lambda$ —— 布拉格条件

- 若 d 一定，测 φ 求 λ
- 若 λ 一定，测 φ 求 d

15-9 线偏振光 自然光

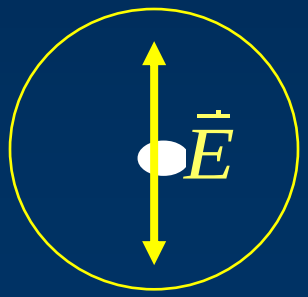
光的偏振态 (polarization state):

自然光、 线偏振光、部分偏振光、圆偏振光、 椭圆偏振光

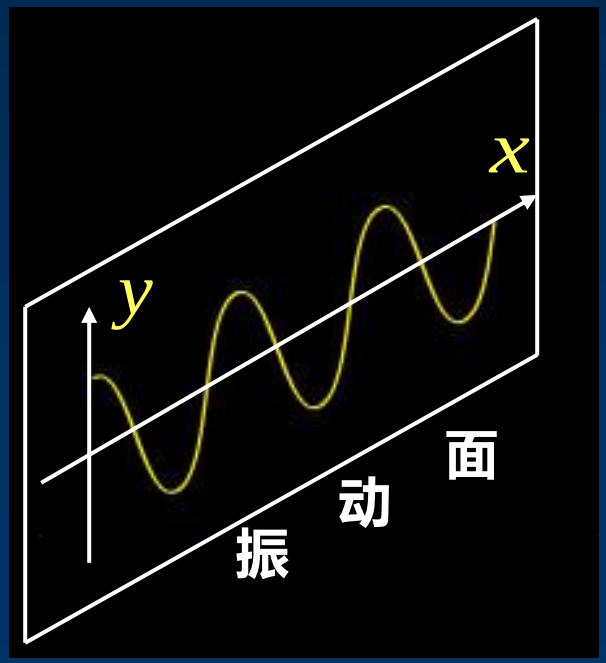
关注的主要问题:

- 当光入射到物质中，其偏振态发生哪些变化?
- 当光经过偏振器件时，偏振光强度如何变化?
- 偏振光如何干涉?

一、线偏振光



面对光传播方向



线偏振光的表示法



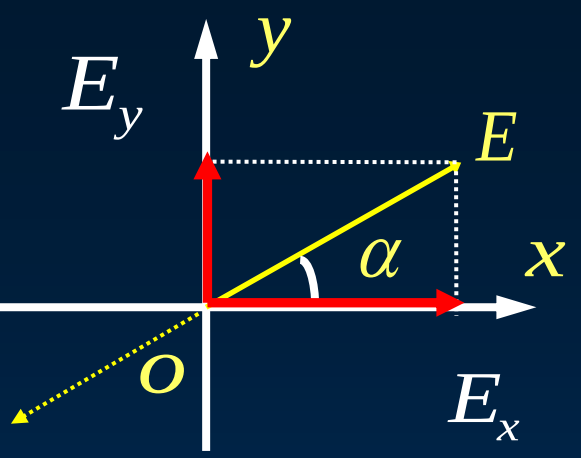
(光振动平行板面)



(光振动垂直板面)

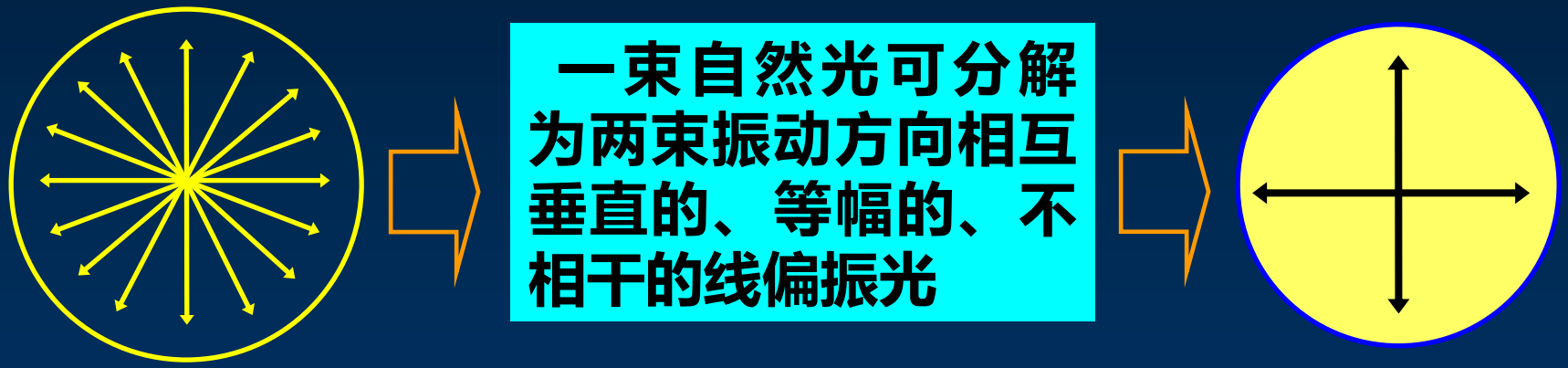
线偏振光沿相互垂直方向分解:

$$E_x = E\cos\alpha \qquad E_y = E\sin\alpha$$



二、自然光（natural light)

普通光源随机发射出大量原子光波列



一束自然光可分解为两束振动方向相互垂直的、等幅的、不相干的线偏振光

各方向振动态均衡

自然光的表示法:



自然光的分解

$$\overline{E}_x = \overline{E}_y$$

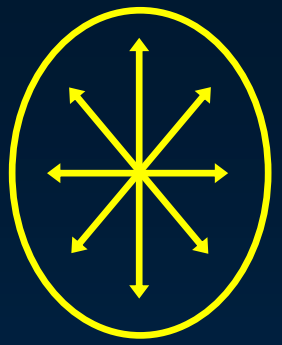
$$I = I_x + I_y$$

$$I_x = I_y = I/2$$

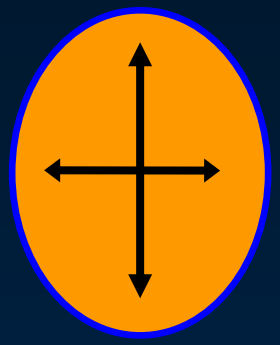
三、部分偏振光 (partial polarization)

介于线偏振光和自然光之间的情况:

部分偏振光



部分偏振光可分解为两束振动方向相互垂直、不等幅、不相干的线偏振光



分振的解

部分偏光分

部分偏振光的表示法：



平行板面的光振动较强



垂直板面的光振动较强

部分偏振光 —— 线偏振光和自然光的混合

四、偏振度 (degree of polarization)

设部分偏振光强度为 I_t,自然光强度为 I_n，线偏振光强度为 I_p，则有 $I_t = I_n + I_p$

偏振度

$$p = \frac{I_p}{I_t} = \frac{I_p}{I_p + I_n}$$

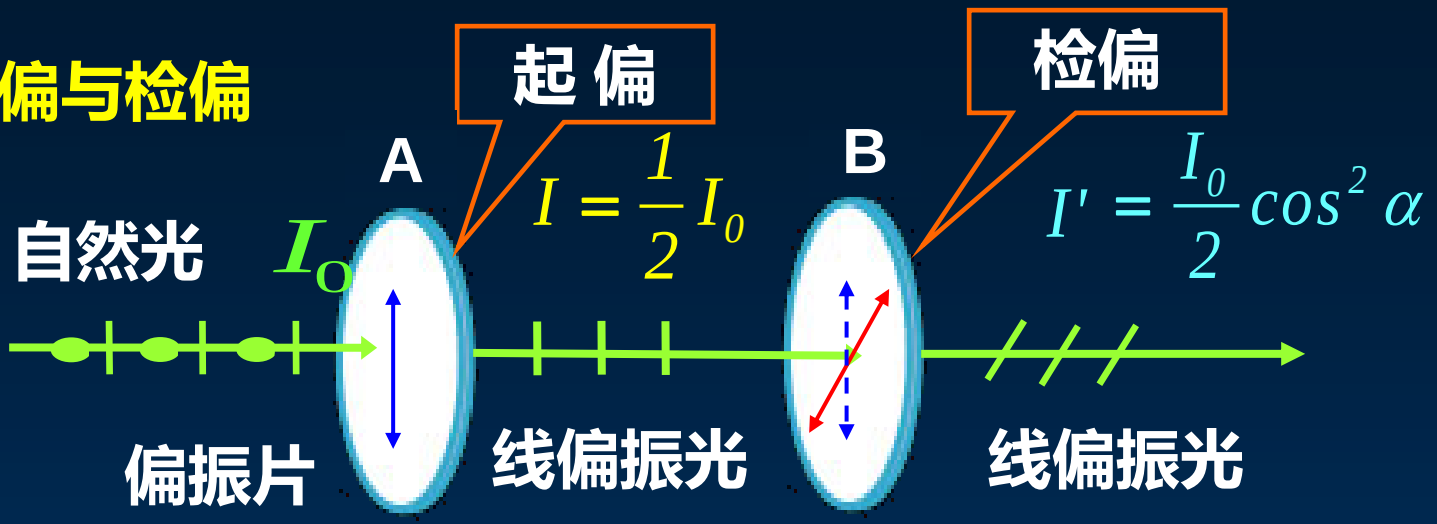
$p = 1$ 线偏振光

$0 < p < 1$ 部分偏振光

$p = 0$ 自然光

15-10 起偏与检偏 马吕斯定律

一、起偏与检偏



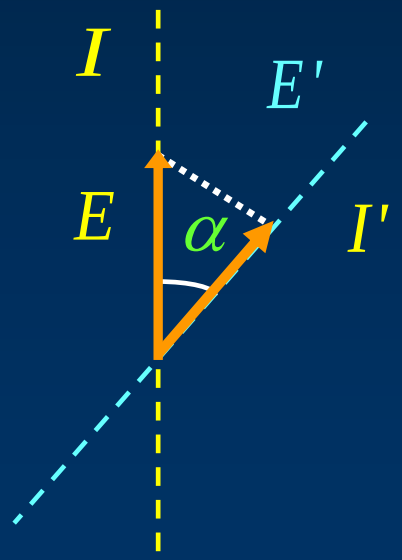
二、马吕斯(Malus)定律（1809年）

$$E' = E \cos\alpha \Rightarrow I' \propto E'^2 = E^2 \cos^2 \alpha$$

当 $\alpha = 0, \pi \Rightarrow I' = I$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow I' = 0$

$$I' = I \cos^2 \alpha$$



- 偏振片的应用：太阳镜，照相机的滤光镜等。